Chapitre 5
Les lois de la mécanique et ses outils

Table des matières

1 Les référentiels et repères

Définition 1 : On appelle **référentiel** un objet par rapport auquel on étudie un mouvement. On distingue trois types de référentiel :

- Le **référentiel terrestre** : le solide de référence est un objet fixe à la surface de la Terre. Les trois axes sont, par exemple, la verticale, les axes est-ouest et nord-sud. Ce référentiel est adapté à l'étude des mouvements de faible amplitude et de courte durée à la surface de la Terre tels que les mouvements étudiés dans un laboratoire.
- Le **référentiel géocentrique** : le solide de référence est le centre de la Terre. Les trois axes sont dirigés vers trois étoiles fixes. Un tel référentiel subit le mouvement de révolution de la Terre autour du Soleil mais pas le mouvement de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles. Il est adapté à l'étude du mouvement des satellites en orbite autour de la Terre.
- Le **référentiel héliocentrique** : le solide de référence est le centre du Soleil. Les trois axes sont les mêmes que ceux du référentiel géocentrique, dirigées vers trois étoiles fixes. Il est adapté à l'étude des astres en orbite autour du Soleil.

Définition 2 : Pour les mouvements dans l'espace, on associe au référentiel un **repère cartésien** $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ défini par une origine et trois vecteurs unitaires deux à deux perpendiculaires. On réduit ce repère à $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ pour un mouvement plan et par $(\mathrm{O}, \vec{\imath})$ pour un mouvement rectiligne.

2 Les grandeurs de l'évolution

2.1 Le vecteur de position

Définition 3 : Tout objet ponctuel M dans l'espace, est repéré par trois coordonnées x, y, z, fonction du temps t, dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ associé au référentiel. On définit alors le **vecteur position** $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et la distance OM par :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x(t)\,\vec{\imath} + y(t)\,\vec{\jmath} + z(t)\,\vec{k} \qquad \mathrm{OM} = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$$

Les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont appelées **équations horaires** du mouvement du point M.
La courbe décrite par M en fonction du temps est appelée **trajectoire** du point M

Exemple : Un point M a pour équations horaires dans le référentiel terrestre :
$x(t) = t + 1$, $y(t) = 3t - 2$ et $z(t) = 2$.

a) Décrire la trajectoire du point M

b) Déterminer la distance OM à la date $t = 3$ s

a) Pour déterminer la trajectoire du point M, il faut éliminer le temps en déterminant une relation entre x, y et z. Par exemple, on exprime t en fonction de x : $t = x - 1$ que l'on remplace dans l'expression de y. On obtient alors :

$$\begin{cases} y = 3(x-1) - 2 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 5 \\ z = 2 \end{cases}$$

La trajectoire du point M est donc une droite d'équation $y = 3x - 5$ dans le plan d'altitude 2

b) Pour déterminer la distance OM, il faut calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ à la date $t = 3$ s. On trouve alors M(4;7;2), d'où :

$$\mathrm{OM} = \sqrt{4^2 + 7^2 + 2^2} = \sqrt{69} \simeq 8,31 \text{ m}$$

2.2 Le vecteur vitesse

Définition 4 : On définit le vecteur vitesse $\vec{v}$ comme la dérivée du vecteur de position en fonction du temps.

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{soit} \qquad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{\jmath} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire

Remarque : On utilise de préférence la notation différentielle pour la dérivée, plutôt que la notation mathématique $x'(t)$, $y'(t)$ et $z'(t)$, rappelant ainsi que la vitesse est obtenue comme le rapport d'une variation de position sur une variation du temps.

L'utilisation de la dérivée s'explique par le passage à la limite de la vitesse moyenne $\vec{v}_m$:

$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}_2} - \overrightarrow{\mathrm{OM}_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\Delta t} \qquad \vec{v} = \lim_{t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t}$$

Si l'on veut connaître l'intensité de la vitesse, il suffit de prendre la norme du vecteur vitesse :

$$v = ||\vec{v}|| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

Exemple : Un point M a pour équations horaires dans le référentiel terrestre : $x(t) = 2t^2 - 3t + 1,\ y(t) = 3t - 2$ et $z(t) = 2$.

a) Calculer les coordonnées du vecteur vitesse au cours du temps

b) Déterminer la vitesse du point M à l'instant $t = 5$ s

a) On dérive les coordonnées du point M en fonction du temps, on obtient alors :

$$\vec{v} = (4t - 3\ ;\ 3\ ;\ 0)$$

b) Pour déterminer la vitesse du point M à l'intant $t = 5$ s, il faut calculer la norme du vecteur vitesse à l'instant $t = 5$ s

$$v(5) = \sqrt{17^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{298} \simeq 17,26 \text{ m.s}^{-1}$$

2.3 Le vecteur accélération

Définition 5 : D'une façon analogue au vecteur vitesse $\vec{v}$, on définit le vecteur accélération $\vec{a}$ comme la dérivée du vecteur vitesse en fonction du temps

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{soit} \qquad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\,\vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\,\vec{\jmath} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\,\vec{k}$$

Si on revient au vecteur position, le vecteur accélération est donc la dérivée seconde du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ en fonction du temps. En utilisant la notation différentielle, on obtient :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t^2} \qquad \text{soit} \qquad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{\jmath} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{k}$$

Remarque : La notation $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ qui se lit « dé deux x sur dé t deux » correspond à la dérivée seconde de x en fonction du temps qui s'écrit en mathématique $x''(t)$

Exemple : Un point M a pour équations horaires dans le référentiel terrestre : $x(t) = 2t^2 - 3t + 1$, $y(t) = 3t - 2$ et $z(t) = 2$.
Déterminer la l'accélération du point M à l'instant $t = 2$ s

Il faut dériver deux fois les coordonnées du point M, pour obtenir le vecteur accélération

$$\vec{a} = (4\ ;\ 0\ ;\ 0) \qquad \text{soit} \qquad a = 4 \text{ m.s}^{-2}$$

2.4 Application

Les coordonnées d'un mobile dans le plan $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, associé au référentiel terrestre, sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = 4t - 2 \\ y(t) = t^2 - 2t + 1 \end{cases}$$

a) Déterminer la position du mobile aux instants $t = 0$ et $t = 2$ s

b) Déterminer l'accélération du mobile à l'instant $t = 10$ s

c) Établir l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile M et en donner une représentation en indiquant le sens de parcours du point M

⇒ ⇒

a) On détermine les coordonnées du point M aux instant $t = 0$ et $t = 2$ s

$$\overrightarrow{\text{OM}}(0) = (-2\,;\,1) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\text{OM}}(2) = (6\,;\,1)$$

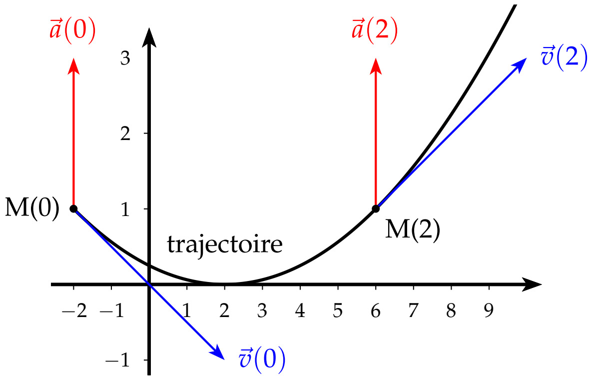
b) Pour déterminer l'accélération à l'instant $t = 10$ s, il faut dériver deux fois le vecteur position :

$$\vec{v} = (4\,;\,2t-2) \qquad \text{et} \qquad \vec{a} = (0\,;\,2)$$

L'accélération est donc constante donc $a(10) = 2$ m.s^{-2}

c) Pour déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire, il faut éliminer t des équations horaires. De l'expression de $x(t)$, on a : $t = \dfrac{x+2}{4}$ que l'on remplace dans l'expression de $y(t)$ en remarquant que :
$t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$

$$y = \left(\frac{x+2}{4} - 1\right)^2 = \left(\frac{x+2-4}{4}\right)^2$$
$$= \frac{(x-2)^2}{16} = \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$



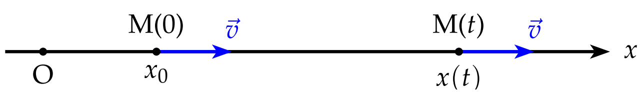
La trajectoire est donc une parabole de sommet S$(2;0)$. Pour connaître le sens du parcours il suffit de repérer les points M(0) et M(2).

3 Quelques mouvements classiques

3.1 Le mouvement rectiligne uniforme

Définition 6 : On appelle mouvement rectiligne uniforme un mouvement dans lequel le mobile se déplace sur une droite à vitesse constante.

Si le mobile M$(x(t);0;0)$ se déplace sur l'axe Ox, on a alors le schéma suivant :



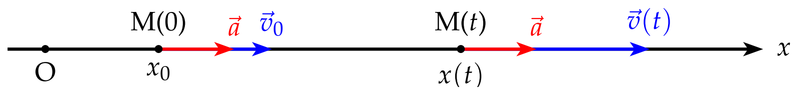
Le vecteur vitesse est alors constant : $\vec{v} =$ Cte car sa norme et son sens sont constants (trajectoire rectiligne). Le vecteur accélération $\vec{a}$ est donc nul $\vec{a} = \vec{0}$. Si à $t = 0$ le mobile se trouve à l'abscisse x_0 et en appelant v l'intensité de la vitesse, on obtient l'équation horaire suivante :

$$x(t) = vt + x_0$$

3.2 Le mouvement uniformement varié

Définition 7 : On appelle mouvement rectiligne uniformément varié un mouvement dans lequel le mobile se déplace sur une droite avec une accélération contante.
Deux cas peuvent se présenter :
- L'accélération et la vitesse ont le même sens : $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$. Le mouvement est alors uniformément accéléré
- L'accélération et la vitesse ont des sens contraires : $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$. Le mouvement est alors uniformément retardé

Si le mobile $\mathrm{M}(x(t);0;0)$ se déplace sur l'axe Ox, on a alors le schéma suivant :



Le vecteur accélération est alors constant : $\vec{a} = \text{Cte}$ car sa norme et son sens sont constants (trajectoire rectiligne).
Pour trouver l'équation horaire, il faut intégrer deux fois le vecteur accélération

$$a_x(t) = a \quad \Rightarrow \quad v_x(t) = at + v_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

Remarque : v_0 et x_0 sont les constante d'intégration.

Exemple : Soit un mobile M subissant une accélération contante sur l'axe Ox tel que $a = 4$ m.s^{-2}. On suppose qu'à $t = 0$ s, le point M est immobile en O. Déterminer la distance parcourue par M à l'instant $t = 5$ s.

Comme le mobile M est immobile en O à $t = 0$ s, alors les constantes d'intégration sont nulles : $v_0 = 0$ m.s^{-1} et $x_0 = 0$ m. On a alors l'équation horaire suivante :

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 = 2t^2$$

Le mobile aura parcouru la distance $x(5)$ à l'instant $t = 5$ s, soit :

$$x(5) = 2 \times 25 = 50 \text{ m}$$

3.3 Le mouvement circulaire uniforme

Définition 8 : On appelle mouvement circulaire uniforme un mouvement circulaire dont le module de la vitesse est constante.

Remarque : Le vecteur vitesse ici n'est pas nul car la direction de ce vecteur varie dans le temps. On a donc :

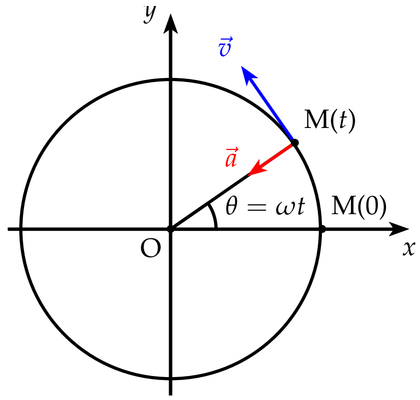
$$v = \text{Cte} \quad \text{et} \quad \vec{v} \neq \text{Cte}$$

Si le point M se déplace dans le plan Oxy sur un cercle de centre O et de rayon R, on a alors la figure suivante :

Si le module du vecteur vitesse est constant, on peut montrer que :

- l'accélération est dirigée vers O : l'accélération est centripède
- on a la relation entre l'accélération et le vitesse suivante :

$$a = \frac{v^2}{\text{R}}$$



Démonstration : Montrons que dans un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est centripède (dirigée vers le centre du cercle).

Supposons qu'à $t = 0$ s le point M soit sur l'axe Ox.
À un instant $t \neq 0$, le point M est repéré par l'angle θ sur le cercle. Comme le mouvement est uniforme, la vitesse angulaire ω est constante. On a donc : $\theta = \omega t$. Les équations horaires sont donc :

$$\overrightarrow{\text{OM}} \left| \begin{aligned} x(t) &= \text{R} \cos\theta = \text{R}\cos\omega t \\ y(t) &= \text{R}\sin\theta = \text{R}\sin\omega t \end{aligned} \right.$$

En dérivant une fois, on obtient les coordonnées du vecteur vitesse, puis une seconde fois le vecteur accélération :

$$\vec{v} \left| \begin{aligned} v_x(t) &= -\text{R}\omega\sin\omega t \\ v_y(t) &= \text{R}\omega\cos\omega t \end{aligned} \right. \quad \text{et} \quad \vec{a} \left| \begin{aligned} a_x(t) &= -\text{R}\omega^2\cos\omega t \\ a_y(t) &= -\text{R}\omega^2\sin\omega t \end{aligned} \right.$$

On remarque que : $\vec{a} = -\omega^2\,\overrightarrow{\text{OM}}$. L'accélération est dirigé vers le centre du cercle. L'accélération est donc centripède.
Calculons les normes des vecteurs vitesse et accélération :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\text{R}^2\omega^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)} = \text{R}\omega$$
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\text{R}^2\omega^4(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)} = \text{R}\omega^2$$

On a alors : $a = \dfrac{v^2}{\text{R}}$

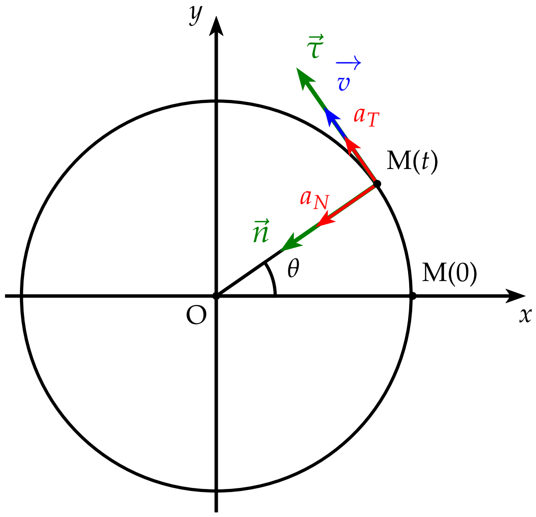
3.4 Le mouvement circulaire non uniforme

Dans un mouvement circulaire non uniforme, l'accélération tangentielle n'est pas nulle. Si le point M se déplace dans le plan Oxy sur le cercle de centre O et de rayon R, On a le schéma suivant :

On peut utiliser un repère de Frenet $(\mathrm{M}(t)\,,\vec{\tau}\,,\vec{n})$. Dans ce repère, on décompose le vecteur accélération en accélération normale a_N et accélération tangentielle a_T. Comme le mouvement n'est pas uniforme, la norme de la vitesse n'est pas constante et donc l'accélération tangentielle n'est pas nulle. On a alors comme vecteur accélération :

$$\vec{a} = a_T\,\vec{\tau} + a_N\,\vec{n} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{\tau} + \frac{v^2}{\mathrm{R}}\,\vec{n}$$

L'accélération normale a la même expresion que dans le mouvement uniforme.



4 Les forces usuelles

4.1 Le poids (force de champ)

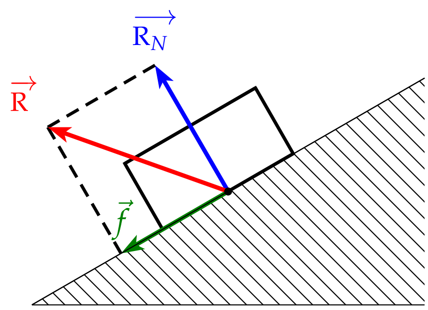
Dans le référentielle terrestre, tout corps de masse m est soumis au champ de pesanteur $\vec{g}$. Cette force correspond au poids du corps :

- origine : centre de gravité
- direction : verticale
- sens : vers le bas
- norme : $P = mg$ avec $g = \simeq 9.81$ m.s^{-2}

4.2 La réaction (force de contact)

La force de réaction du sol $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ en cas de frottement possède deux composantes : une composante normale au sol $\overrightarrow{\mathrm{R}_N}$ qui ne travaille pas et une composante parallèle au sol $\vec{f}$ dans le sens contraire au déplacement (force de frottement)

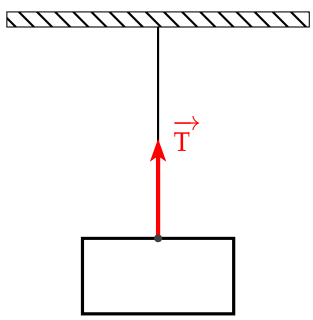
$$\overrightarrow{\mathrm{R}} = \vec{f} + \overrightarrow{\mathrm{R}_N}$$



4.3 Tension d'un fil (force de contact)

La force de tension $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ d'un fil est une force qui s'exerce par un fil sur un système. Ses caractéristiques sont :

- origine : point du système en contact avec le fil
- direction : le fil
- sens : du système vers le fil
- norme : T



4.4 La poussée d'Archimède

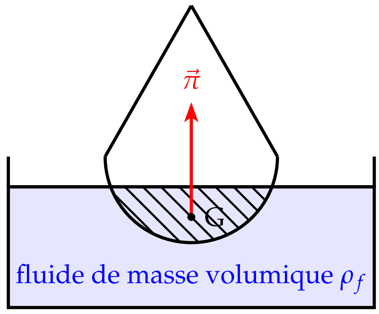
Un corps plongé dans un fluide reçoit une poussée π de bas en haut égale au poids du volume du fluide déplacé.

Cette force $\vec{\pi}$ a comme caractéristiques :

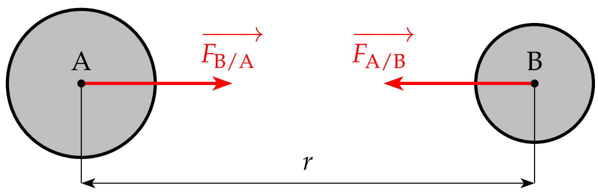
- origine : centre de gravité de la partie immergée
- direction : verticale
- sens : vers le haut
- norme : poids du fluide déplacé

$$\pi = \rho_f \times \mathrm{V} \times g$$

avec ρ_f : masse volumique du fluide, V : volume immergé (partie hachurée) et g : intensité de la pesanteur



4.5 La force gravitationnelle (de Newton, force de champ)



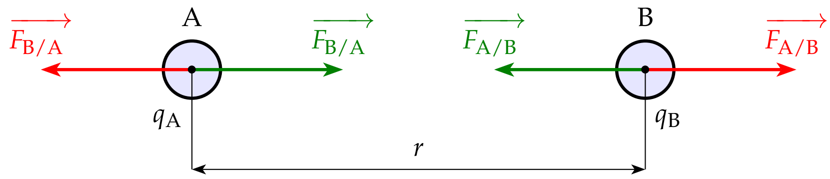
Définition 9 : Deux corps A et B de masses respectives m_A et m_B s'attirent.

Cette force d'attraction $F_{A/B}$ et $F_{B/A}$ est inversement proportionnelle à la distance r des deux corps :

$$F_{A/B} = F_{B/A} = G \times \frac{m_A m_B}{r^2}$$

G : contante de gravitation 6.67×10^{-11} SI

4.6 La force électrostatique (de Coulomb, force de champ)



— $q_A \times q_B < 0$ attraction — $q_A \times q_B > 0$ répulsion

Définition 10 : Deux corps A et B de charges électriques respectives q_A et q_B s'attirent (si de charges contraires) ou se repoussent (si de même charge). Cette force d'attraction ou de répulsion $F_{A/B}$ et $F_{B/A}$ est inversement proportionnelle à la distance des deux corps :

$$F_{A/B} = F_{B/A} = K \times \frac{q_A q_B}{r^2}$$

K constante de Coulomb (dans l'air) 9×10^9 SI

5 Les lois de Newton

5.1 Première loi ou principe d'inertie

Loi d'inertie : Dans un référentiel galiléen, tout système reste immobile ou conserve un mouvement rectiligne uniforme aussi longtemps que la somme vectorielle des forces extérieures est nulle.

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l}\text{système en repos ou} \\ \text{en mouvement rectiligne uniforme}\end{array}$$

Remarque : L'inertie, c'est à dire la résistance au changement de mouvement, est donc une propriété intrinsèque de la matière.

Exemple : Les astronautes d'*Appolo* en 1969 ont arrêté leurs moteurs et ont continué leur voyage vers la Lune sans aucune force motrice.

⚠ Il faut comprendre cependant que la loi d'inertie, la première loi fondamentale de la Nature est une loi idéale. Nulle part dans l'Univers, un objet peut être libéré complétement des influences externes. L'idée de mouvement sur une ligne droite infinie n'est pas réaliste, surtout dans un cosmos encombré de galaxies.

Définition 11 : On appele **référentiel galiléen** ou référentiel d'inertie, un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié. On admettra que les référentiels terrestre, géocentrique et héliocentrique sont des référentiels galiléens dans leur domaine de validité

5.2 Deuxième loi ou principe fondamental de la dynamique

Principe fondamental de la dynamique (PFD) : La somme vectorielle des forces extérieures s'exerçant sur un solide (masse constante) est proportionnelle à son accélération.

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$$

m est la masse du solide en kg et a est l'accélération en N.kg^{-1}

Remarque : Le PFD est le prolongement de la loi d'inertie. En effet si la somme vectorielle des forces extérieures est nulle alors l'accélération est nulle.

Exemple : Un satellite tourne autour de la Terre car celle-ci exerce une force centripède sur ce satellite.

5.3 Troisième loi ou principe de l'action et de la réaction

Action et réaction : Si un corps A exerce une force $\overrightarrow{F_{A/B}}$ sur un corps B, alors le corps B exerce une force $\overrightarrow{F_{B/A}}$ sur le corps A telle que :

$$\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}}$$

Exemple : Si une valise est posé sur le sol, cette valise exerce son poids sur le sol qui en contre-partie exerce une force identique dans le sens opposé à cette valise.

5.4 Application des lois de Newton

Un skieur de 80 kg descend une piste de 150 m inclinée de 20 ° par rapport à l'horizontale. Déterminer sa vitesse en bout de piste en considérant deux cas de figure :

1) On néglige la force de frottement sur les skis

2) On considére que la force de frottement sur les skis est constante et vaut 150 N

PS : On prendra $g = 9,81$ m.s^{-2}. On négligera la resistance de l'air et on supposera que le skieur ne décolle pas et ne perd pas de ski en route !

1) a) **Analyse du problème : référentiel, repère, bilan des forces, PFD.**

Le mouvement du skieur est de faible amplitude et de courte durée, on peut donc considérer que le référentiel terrestre est galiléen. Faisons une figure pour visualiser le bilan des forces :

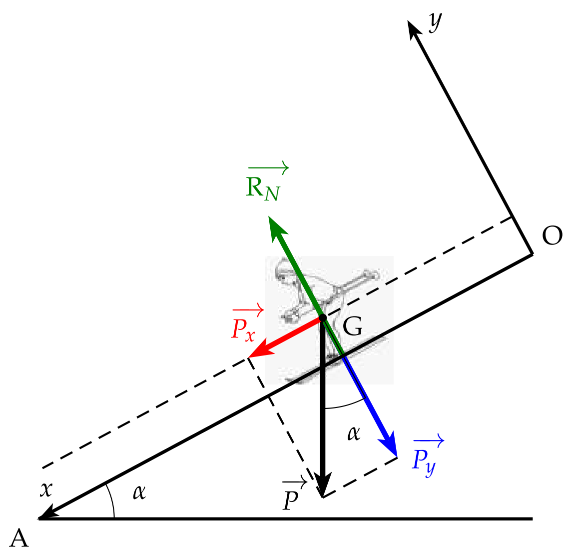
Données :

- $m = 80$ kg
- OA $= 150$ m
- $\alpha = 20°$
- Le skieur part de O sans vitesse initiale.

Repère :

On prendra le repère lié à Oxy. On décompose alors le poids $\overrightarrow{P}$ en une composante sur x, $\overrightarrow{P_x}$, et une composante sur y, $\overrightarrow{P_y}$. Comme il n'y a pas de force de frottement la force de réaction est normale au sol

Par perpendicularité on retrouve l'angle α en G



b) **Résolution du problème : vitesse v en A.**

D'après le principe fondamental de la dynamique (PFD), on a :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} = m\vec{a}$$

On suppose que le skieur ne décolle pas donc l'accélération n'a lieu que sur l'axe Ox. En projetant alors sur Ox et Oy, on a :

$$\begin{cases} P_x = m\,a_x \\ -P_y + \mathrm{R}_N = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\sin\alpha = m\,a_x & (1) \\ \mathrm{R}_N = P_y \end{cases}$$

De (1), comme $P = mg$, on obtient : $mg\sin\alpha = m\,a_x \quad \Leftrightarrow \quad a_x = g\sin\alpha$

On constate que l'accélaration du skieur ne dépend pas de sa masse !

On intègre deux fois pour obtenir la vitesse et l'équation horaire :

$$v(t) = g\sin\alpha\, t + v_0 = g\sin\alpha\, t \quad \text{car } v_0 = 0$$
$$x(t) = \frac{1}{2}g\sin\alpha\, t^2 + x_0 = \frac{1}{2}g\sin\alpha\, t^2 \quad \text{car } x_0 = 0$$

On peut alors déterminer le temps t_{A} où le skieur est en bout de piste

$$\mathrm{OA} = \frac{1}{2}g\sin\alpha\, t_{\mathrm{A}}^2 \quad \Leftrightarrow \quad t_{\mathrm{A}} = \sqrt{\frac{2\mathrm{OA}}{g\sin\alpha}} \simeq 9,5\ \mathrm{s}$$

On peut enfin trouver la vitesse v en bout de piste :

$$v = v(t_{\mathrm{A}}) = g\sin\alpha\, t_{\mathrm{A}} = g\sin\alpha\sqrt{\frac{2\mathrm{OA}}{g\sin\alpha}} = \sqrt{2g\sin\alpha\,\mathrm{OA}} \simeq 32\ \mathrm{m.s}^{-1}$$

Pour trouver la vitesse en km.h^{-1}, on multiplie par 3,6 : $v = 114\ \mathrm{km.h}^{-1}$

2) a) **Analyse du problème : référentiel, repère, bilan des forces, PFD.**

Par rapport au cas précédent, il faut rajouter une force de frottement $\vec{f}$ dans le sens contraire au mouvement :

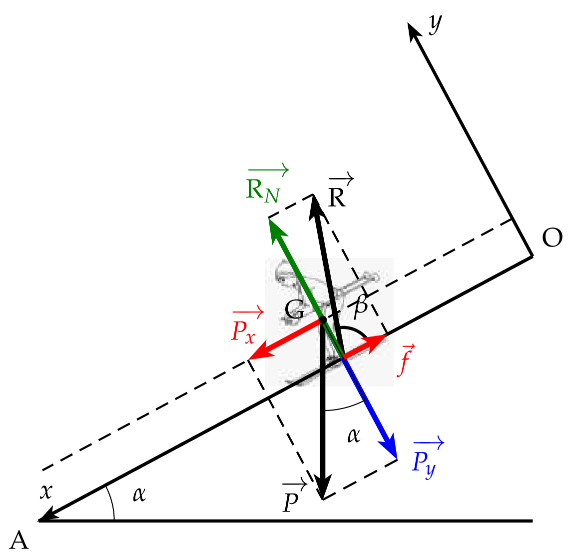
Données :

- $m = 80$ kg
- OA $= 150$ m
- $\alpha = 20°$
- $f = 150$ N
- Le skieur part de O sans vitesse initiale.

Repère :

On décompose la réaction $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ en une composante sur x, $\vec{f}$, et une composante sur y, $\overrightarrow{\mathrm{R}_N}$.

L'angle β correspond à l'angle de la réaction $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ avec l'axe Ox



b) **Résolution du problème : vitesse v en A.**
D'après le principe fondamental de la dynamique (PFD), on a :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} = m\,\vec{a}$$

On suppose que le skieur ne décolle pas donc l'accélération n'a lieu que sur l'axe Ox. En projetant alors sur Ox et Oy, on a :

$$\begin{cases} P_x - f = m\,a_x \\ -P_y + \mathrm{R}_N = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\sin\alpha - f = m\,a_x & (1) \\ \mathrm{R}_N = P_y \end{cases}$$

De (1), comme $P = mg$, on obtient :

$$mg\sin\alpha - f = m\,a_x \quad \Leftrightarrow \quad a_x = g\sin\alpha - \frac{f}{m}$$

On constate dans ce cas que l'accélaration du skieur dépend de sa masse.

On intègre deux fois pour obtenir la vitesse et l'équation horaire :

$$v(t) = \left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)\,t + v_0 = \left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)\,t \quad \text{car } v_0 = 0$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)\,t^2 + x_0 = \frac{1}{2}\left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)\,t^2 \quad \text{car } x_0 = 0$$

On peut alors déterminer le temps t_{A} où le skieur est en bout de piste

$$\mathrm{OA} = \frac{1}{2}\left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)\,t_{\mathrm{A}}^2 \quad \Leftrightarrow \quad t_{\mathrm{A}} = \sqrt{\frac{2m\mathrm{OA}}{mg\sin\alpha - f}} \simeq 14,2\ \mathrm{s}$$

On peut enfin trouver la vitesse v en bout de piste :

$$v = v(t_{\mathrm{A}}) = \left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)\,t_{\mathrm{A}} = \left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)\sqrt{\frac{2\,\mathrm{OA}}{g\sin\alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(mg\sin\alpha - f)\,\mathrm{OA}}{m}} \simeq 21\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

Pour trouver la vitesse en km.h^{-1}, on multiplie par 3,6 : $v = 76$ km.h^{-1}

Remarque : Si l'on veut connaître l'angle β que fait $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ avec l'axe Ox.

$$\tan\beta = \frac{f}{P_y} = \frac{f}{mg\cos\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \arctan\frac{mg\cos\alpha}{f} \simeq 78,5°$$